11.24.

3、设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $R(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，则下列结论正确的是（　　）。

（A）A 的任意 m 个列向量必线性无关；

（B）A 的任意一个 m 阶子式不等于零；

（C）A 通过初等行变换必可以化为 (E_m,O) 的形式；

（D）非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 一定有无穷多解 。

A选项：$A\sim(E_m,O)$，故错；存在m个列向量无关，但不是任意、m个无关。

B选项：秩的定义：$R(A)=m$ 是指存在一个m阶子式非零，而非任意。

C选项：$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 无法通过初等行变换变为 (E_2,O)

但可 $A\sim(E_m,O)$ ✓

D选项：$AX=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow m=R(A)=R(A,b)<n$

$\because$ 增广矩阵 (A,b) 为 m行 n+1列 矩阵

$\therefore$ $R(A,b)\leq\min\{m,n+1\}=m$.

又 $R(A,b)\geq R(A)=m$.

$\therefore$ $R(A,b)=R(A)=m<n$，故选D.

$R(A,b)=R(A)$ 或 $R(A)+1$

$\because R(A,b)\leq m$

$\therefore R(A,b)=m$.

* $R(A)=m \Leftrightarrow A\overset{c}{\sim}(E_m,O)$ 行满秩.

$\Leftrightarrow$ 行向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 右消去律成立 $\Leftrightarrow X^TA=0$ 有唯一零解

* $R(A)=n \Leftrightarrow A\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$，列满秩.

$\Leftrightarrow$ 列向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ $AB=AC \Leftrightarrow B=C$，左消去律成立.

$\Leftrightarrow$ $AX=0$ 有唯一零解.

2、下列命题正确的是（　　）

（A）若向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$ 可由向量组 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s$ 线性表示，则 $r\le s$；

（B）设 A，B 均为 $m\times n$ 矩阵，则 A 与 B 等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$；

（C）若向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_3$ 线性无关，向量 $\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，则 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 一定线性无关；

（D）设 A 为 n 阶矩阵，若 $A^2=O$，则 $A=O$。

A选项：Page-86．定理3．中 $R(a_1,\cdots a_r)\le R(b_1\cdots b_s)$．而非 $r\le s$．故A错．

B选项：秩为同型矩阵等价完全不变量故 B对．

C选项：$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$a_1=a_2$ 故C错．

D选项：$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$．$A^2=0$．故D错．

考察对概念的理解，这种类型题目可帮助我们更好的加深理解；

1、n 阶方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是（　　）.

（A）　A 是实对称矩阵；　　（B）　A 的 n 个特征值互不相等；

（C）　A 有 n 个线性无关的特征向量；　　（D）　A 的特征向量两两正交.

A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 可逆阵 P. s.t $P^{-1}AP = D$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量.

选项A：实对称阵可对角化. 但反之不对. 如 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

选项B：有 n 个互异特征值矩阵可对角化. 但反之不对. 如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

这里一定有互异. 因为任意 n 阶 A_n 在 $\mathbb{C}$ 中一定有 n 个特征值. 但不一定有 n 个互异特征值.

选项C：✓

选项D：A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 正交阵 P. s.t $P^TAP = P^{-1}AP = D$ 为对角阵

$\Downarrow$

$A^T = A$　　$\Rightarrow$ 对称阵的不同特征值对应特征向量正交.

$\Downarrow$

A 可相似对角化

$\therefore$ D选项与 A 可相似对角化没有直接联系

如 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　A 的特征值 $\lambda = 0$ 对应特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 1$ 对特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

正交. 但 A 不可对角化.

3、n 阶方阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是（　）

（A）A 有 n 个不同的特征值；（B）A 有 n 个线性无关的特征向量；

（C）$|A| \neq 0$；　　（D）A 的特征方程没有重根。

C：$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为对角阵. 但 $|A| = 0$. C错.

D：A 特征方程无重根 $\Rightarrow$ 有 n 个互异特征值 $\Rightarrow$ 可相似对角化. 但反之不对.

3、设3阶方阵 A 的各行元素之和均为0，且 $R(A)=2$，则 $A\bar{x}=\bar{0}$ 的通解为__________。

A_3 各行元素之和均为0.　　这里有个弯.

$\Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$，即 $x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的一个非零解.

$R(A)=2. \Rightarrow$ 基础解系含 $n-R(A)=1$ 个向量.

$\therefore \quad Ax=0$ 通解为 $\quad X=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\forall k\in\mathbb{R}$.

注意、理解：$Ax=0$，$Ax=\beta$ 通解的形式和性质.

这类题已出现多次.

3、设 $\vec{\alpha}=(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$，矩阵 $A=E-\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$，$B=E+2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$，则 $AB=$ ______。

$$AB=(E-\alpha^T\alpha)(E+2\alpha^T\alpha)$$

$$=E+2\alpha^T\alpha-\alpha^T\alpha-2\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha.$$

$$=E+\alpha^T\alpha-2(\alpha\alpha^T)\cdot\alpha^T\alpha$$

$$=E$$

这里考察 秩为1矩阵 $\alpha^T\alpha$ 的幂次及多项式.

$$(\alpha^T\alpha)^{k+1}=\alpha^T\underline{\alpha\cdot\alpha^T}\underline{\alpha}\cdot\cdots\cdot\alpha^T\alpha.$$

$$=\underbrace{(\alpha\cdot\alpha^T)^k}_{\text{这是一个数}}\cdot\underbrace{\alpha^T\alpha}_{\text{方阵}}.$$

内积的定义 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$

$$=(x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$=x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

2、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} =$ ________。

Vandermonde 行列式

大指标 − 小指标.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

$i > j$

低阶数字行列式 建议为降阶.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3 - C_1]{C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 21 \end{vmatrix} = 21 - 15 = 6.$$