答疑：基础解系、特征向量、线性变换矩阵、正交变换矩阵的不唯一性

吴利苏（wulisu@sdust.edu.cn）

2022 年 12 月

有多位同学向我确认，在求正交变换化二次型为标准型时，求得的正交矩阵 P 与参考答案不同，是否正确，问题何在？现答疑如下：

1 基础解系的不唯一性

齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系定义为解集/解空间

$$S=\{X \mid AX=0\}$$

的极大无关组. 所以，S 的任意一个极大无关组都是组 $AX=0$ 的一组基础解系，所以基础解系是不唯一的。任意两组基础解系都是等价的（可以相互线性表示），所以若我们求得的基础解系和参考答案中的基础解系是等价的，那我们所求的是正确的。最简单也是最常见 2 种等价关系：

- $R(A)=n-1$, 即基础解系只包含一个解向量。此时，参考答案给出的是 ξ, 自己所求的为 $k\xi$，$k\neq 0$(比如 $-\xi$)，那我们求得的基础解系是正确的。

  这是因为 $X=\xi$ 为 $AX=0$ 的非零解，则 $X=k\xi(k\neq 0)$ 也是 $AX=0$ 的非零解。进一步，$AX=0$ 的任意一个非零解和 $X=\xi$ 都只差一个非零常数倍，所以 $AX=0$ 的任意一个非零解都可作为基础解系.

- $R(A)=n-2$，即基础解系只包含两个解向量，设为 ξ_1,ξ_2。则任意和 ξ_1,ξ_2 等价的 α_1,α_2 都是 $AX=0$ 的基础解系。从向量空间的角度看，

解空间 $S=L(\xi_1,\xi_2)=L(\alpha_1,\alpha_2)$, 不同的基础解系可以看为 S 的不同的基.

2 线性变换矩阵和正交变换矩阵的不唯一性

在方阵 A 的相似对角化和正交相似对角化时，求线性变换矩阵和正交变换矩阵，实际上就是求每个特征值 λ 对应的特征向量，也就是求齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$（等价的 $(A-\lambda E)X=0$）的基础解系。由于基础解系不唯一，所以线性变换矩阵和正交变换矩阵也是不唯一的。所以求得的变换矩阵和参考答案不一样，也不一定是错的。

以求正交变换矩阵为例，不唯一的原因可能有：

- 齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的基础解系取法不唯一，这个最常见. 例如, 参考答案是 ξ，你的答案是 $-\xi$。
- 特征向量的排列顺序不一样. 例如，参考答案是 ξ_1,ξ_2,ξ_3, 你的答案是 ξ_3,ξ_2,ξ_1.
- 同一特征值对应多个特征向量，正交化的次序不唯一。例如，参考答案将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 正交化得到 $\alpha_1=\xi_1,\alpha_2,\alpha_3$，你的答案将 ξ_3,ξ_2,ξ_1 正交化得到 $\beta_1=\xi_3,\beta_2,\beta_3$。

3 如何做到和参考答案一致

- 特征值的顺序从小到大排列.
- 求特征值 λ 对应的特征向量时,
  - 将齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的系数矩阵 $\lambda E-A$ 化为行最简形;
  - 自由未知量的取法：每个非零行首个非零元 1 所在列以外的列对应的未知量。“阶梯形靠近竖线的列不取，剩余的列取为自由未知量”。比如

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

自由未知量取为 x_3.（实际上，x_1, x_2, x_3 其中任意一个都可以取为自由未知量）

– 依次令自由未知量其中一个为 1，其余为 0, 得到顺序排列的基础解系/特征向量.

– 按照上面的顺序进行正交化.

这样，大概率会和参考答案一致。

如果在以上过程中，进行了一些化简。比如求得的特征向量为 $\xi = (-1, -\frac{1}{2}, 1, 0)$, 为了去掉分母并使得负号尽量少，可取特征 $\xi' = (2, 1, -2, 0)$, 则得到的变换矩阵可能就不同了. 但是，也鼓励大家在计算过程中进行适当化简后，再进行后面操作，以减少计算量。

所以不要求大家的答案和参考答案一致，大家的期末试卷答案只要是对的，都会有分的。

4 正交变换矩阵的不唯一性代表什么

对于二次型来说，他表示向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的二次曲面. 二次型可以在正交变换化简为标准型，表示存在（但不唯一）的一组标准正交基，使得二次曲面在这组标准正交基下的表达式为 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdot + \lambda_n x_n^2$. 比如 $\mathbb{R}^2$ 中的圆，在自然基

$$e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T$$

的表达式为 $x^2 + y^2 = f$, 在其他标准正交基

$$\alpha_1 = (\cos\theta, \sin\theta)^T, \alpha_2 = (\sin\theta, -\cos\theta)^T$$

的表达式也为形式 $X^2 + Y^2 = f$.

如仍有疑问可邮箱联系我！