《线性代数》第二章作业（5 月 14 日提交）

临班 370

2023 年 6 月 26 日

班级：____________ 姓名：____________ 学号：____________

1. 判断题（错误请给出说明或反例. 每题 2 分，共 20 分）: ：红错

（1）$|A+B| = |A| + |B|$. （$A = B = E$）

（2）$|k \cdot A| = k \cdot |A|$. （$|k \cdot A_n| = k^n \cdot |A_n|$）

(3) $|AB| = |BA|$. （A, B 为同阶方阵时对）

(4) $AB = BA$. （矩阵乘法不满足交换律）

(5) $A^*A = AA^*$.

(6) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. （$A = B = 1$）

(7) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$. （矩阵乘法不满足交换律）

(8) $A^2 = O$, 则 $A = O$. （$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$）

(9) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. （矩阵乘法不满足交换律）

(10) 若 $AX = AY, A \neq O$，则 $X = Y$. （A 列满秩方有左消去率）

2. 填空题 (每空 3 分，共 15 分)：

(1) 已知矩阵 $A, B, C_{s\times n}$, 满足 $AC = CB$, 则 B 是__n__ 阶矩阵.

(2) 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $X = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^* = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}}$, $A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}}$.

(4) n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 4A - E = 0$, 则 $A^{-1} = \underline{\quad A - 4E \quad}$.

3. 计算题 (每题 10 分，共 50 分)：

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, 用二项式展开计算 A^{10}.

提示: $A^{10}=(\lambda E+B)^{10}=\lambda^{10}E+C_{10}^{1}\lambda^{9}B+C_{10}^{2}\lambda^{8}B^{2}$.

（2）设 $\alpha=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ $A=\alpha\beta^{T}$, 求 A^{100}.

提示: 矩阵乘法结合率.

(3) 用 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

注意: A^* 的定义.

(4) A 为 4 阶方阵，$|A|=2$, 求 $|(\frac{1}{2}A)^{-1}-3A^*|$.

(5) 求矩阵 X, 使得 $AX=2X+A$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

注意: 矩阵乘法分左右.

4. 证明题 (第 (1) 题 5 分，第 (2) 题 10 分，共 15 分)：

(1) $AB=A+B$，证明 $A-E$ 可逆.

提示: 凑因式乘积.

(2) 设列向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$, $H=E-2XX^T$. 证明: H 为对称矩阵，且 $HH^T=E$.